121 – Matrices semblables. Matrices équivalentes. Applications.

I) Introduction et objectifs

1) Définitions [Gou 121]

Déf : matrice semblable, congruente [Gou 121]

Ne pas confondre semblable et équivalente ! Deux matrices carrées équivalentes ne sont pas forcément semblables ! En effet, ce n'est pas parce que A=PBQ^-1 que A=PBP^-1.

Prop : [Gou 121]
- A et B sont semblables ssi il existe un endomorphisme u :E->E, des bases B1 et B1' de E tq Mat_B1(u)=A et Mat_B1'(u)=B.
- A et B sont équivalentes ssi il existe un morphisme u :E->F, des bases B1 et B1' de E, des bases B2 et B2' de F tq Mat_B1,B2(u)=A et Mat_B1',B2'(u)=B.

Pour équivalente, on peut choisir la base de départ et d'arrivée indépendamment, pas pour semblable.

Rq : semblable => équivalent

2) Actions de groupe et enjeux

On reformule tout ça en termes d'action de groupe

Prop :
Action 1 : GLn x GLm agit sur M_n,m (action de Steinitz)
Action 2 : GLn agit sur Mn par conjugaison

Csq : deux matrices sont équivalentes (resp semblables) ssi elles sont dans la même orbite pour l'action 1 (resp l'action 2).

Buts :
- pour une matrice donnée, on veut trouver un représentant sympathique dans son orbite. Ceci fournira des critères pour savoir si deux matrices sont semblables ou équivalentes.
- on veut trouver des invariants pour ces actions, qui caractériseront les orbites.
- étudier la topologie des orbites.

II) Matrices équivalentes

1) Classes d'équivalence [BMP 155]

Th : A une matrice de rang r. Alors A est équivalente à J_r [BMP 155] + [Cog 152] *(le th de la base incomplète est crucial)*

Cor : A et B dans M_n,p(K). A équivalente à B ssi rg(A)=rg(B) [BMP 155]

Les orbites sont donc entièrement déterminées par le rang, que ce soit sur R ou sur C. On verra que ce n'est pas si simple pour la relation de similitude. Un représentant sympa de chaque orbite est J_r.

Appl : A est équivalente à tA [BMP 155]

Appl : GL(K) dense dans M(K) [BMP 155] *(on prend A dans M(K), A de rang r, A=PJ_rQ, on pose A_p=P(J_r+1/p*Id)Q, les A_p sont inversibles et convergent vers A)*

Appl : toute matrice de M(K) est somme de deux matrices inversibles [BMP 155] *(si K infini, on prend A=(A-l*Id)+l*Id où l non nul et non valeur propre. Si K fini et #K>2, pour l différent de 0 et 1, si A est de rang r on écrit A=P(J_r-l*Id)Q+lPQ)*

2) Opérations sur les lignes et les colonnes [BMP 185]

Def et prop : une opération élémentaire sur une matrice est la multiplication par une matrice élémentaire, qui correspond à faire des opérations sur ses lignes et ses colonnes Il en existe trois types :

- Matrices de transvection (U=Id+E_i,j, a non nul, i différent de j). Multiplier à gauche par U revient à faire L_i <- L_i+aL_j. A droite : C_i <- C_i+aC_j
- Matrices de dilatation (U=Id+(a-1)E_i,i, a inversible différent de 1). Multiplier à gauche revient à faire L_i <- aL_i, à droite C_i <- aC_i.
- Matrices de transposition (U=Id-E_i,i-E_j,j+E_i,j+E_j,i). Multiplier à gauche par U revient à faire L_i <-> L_j, à doite C_i <-> C_j *(cas particulier de matrice de permutations)* [BMP 185]

Prop : effectuer une opération élémentaire sur une matrice ne change pas son rang [BMP 188] *(car ces matrices élémentaires son inversibles)*

Appl : calcul du rang par opération sur lignes et colonnes [BMP 186]

Rq : prolongement dans cette veine : décomposition LU, Cholesky, Bruhat, méthode de Gauss, générateurs de GLn et SLn.

III) Matrices semblables

1) Des représentants normaux

Déf : A est dite diagonalisable (resp trigonalisable) si il existe une matrice diagonale (resp triangulaire) dans O_A.

Th : E hermitien. A normale => A diagonalisable [Gou 258]

Th : E euclidien ; réduction d'une matrice normale [Gou 258] *(idée : on découpe E en sev de dim 1 ou 2 stables par u et u*)*

Th : tableau avec représentant canonique. Colonnes : type de matrice/représentant sympathique.
Les matrices de Sn(R) et Hn(C) sont semblables à une matrice diagonale réelle.
Les matrices de Un(C) sont semblables à une matrice diagonale dont les termes sont des exp(i_a_k).
Les matrices de An(C) sont semblables à une matrice diagonale avec des imaginaires purs.
Les matrices de An(R) sont semblables à une matrice diagonale par blocs de taille 2.
Les matrices de On(R) aussi, avec des 1 des -1 et des blocs de rotations. [Gou 244 à 262]

Application : calculer les puissances de matrices, ce qui sert si par exemple on a une relation de récurrence U_n=A*U_{n-1}, et U_0=…
Voir http://membres.multimania.fr/ouichoulamya/mp/exos/ExosReduction.pdf p.8

Application : résolution d'équation : $A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0$ dans M_3(C)

Corollaire de la réduction de U(n) et SO(n) : ils sont connexes par arc [Aud 66] *(pour SO(n) : il suffit de relier toute matrice à l'identité. Le nb de -1 est pair, on les regroupe deux par deux en les écrivant comme une matrice de rotation avec theta=Pi. Donc la matrice a que des blocs de rotations et des 1. On remplace theta par t* theta, et le chemin t->B(t) mène de Id à la matrice)*

2) Réduction de Jordan

Dans tout ce qui suit on travaille dans Mn(C).

Th : décomposition de Dunford [Gou 193]

Th : A, B diagonalisables. A et B semblables ssi même poly caract.

On considère un endomorphisme nilpotent.

Prop : suite de noyaux emboîtés. Elle s'essouffle. On peut y associer un tableau de Young.

*La suite des noyaux croit en s'essoufflant. L'indice à partir duquel elle devient constante est la multiplicité dans le polynôme minimal. Par exemple, si Ker(A)=Ker(A²), 0 est racine simple dans le polynôme minimal. On en déduit que A est diagonalisable ssi Ker(A-lambda*Id)²= Ker(A-lambda*Id) pour tout lamba. Le nb de cases dans la première colonne du tableau est le degré du polynôme minimal (ie l'indice de nilpotence)*

Th : tout endomorphisme nilpotent admet une représentation en bloc de Jordan dans une bonne base. *On part d'un supplémentaire du dernier K_r différent de l'espace entier, et on en prend une base. Par récurrence, pour j qcq, on construit un supplémentaire de K_{j-1} dans K_j…Voir cours GC.*

Prop : deux endomorphismes nilpotents sont semblables ssi ils ont même tableau de Young. En particulier, il y a unicité de la réduction de Jordan.

Csq : on peut dénombrer le nombre d'orbites dans le cône nilpotent, c'est le nombre de tableau de Young à n cases, càd le nb de partitions de n, noté p(n) [Nou 174] *p(n) est le coeff de t^n dans le produit infini des 1/(1-t^i)*

Maintenant, u est un endomorphisme quelconque.

Th : Jordan pour matrice quelconque

Th : polynôme caract + tableaux de Young = invariants totaux de similitude. Autrement dit, A et B sont semblables ssi A et B ont mêmes vp et si toute valeur propre l et tout entier positif k, dim(Ker(A-l*Id)^k)=dim(Ker(B-l*Id)^k) *(se servir de Dunford)*

Appl : M est semblable à sa transposée sur Mn(C) [Gou 201] *(il suffit de montrer qu'un bloc de Jordan est semblable à sa transposée. Pour ça, on réorganise les vecteurs de la base de Jordan et ça marche)*

D'après le th de Jordan, il y a une infinité de classes de similitudes sur Mn(C) car deux matrices au polynôme caract différent ne seront pas semblables, et il y a une infinité de pol caract possible. Par contre, pour un poly caract fixé, il y a un nb fini d'orbites.

Appl : dénombrement des classes de similitude de matrices pour un polynôme caractéristique donné *(égal à p(k_1)*…*p(k_r) si les k_i sont les dim des SEC)*

Prop : matrices semblables sur C ssi semblables sur R [Gou 158] *(reste vrai pour toute extension L/K)*

Csq : les orbites sur R sont données par l'intersection des orbites sur C avec Mn(R).

3) <u>Endomorphismes cycliques et invariants de similitude</u> [Gou 289]

Def : E_x={P(u)(x), P}. P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal {P tq P(u)(x)=0}.

Prop : E_x est un ev de dimension le degré de P_x, et on a une base.

Prop : il existe x tq P_x = polynôme minimal

Def : u est cyclique s'il existe x tq E=E_x, ce qui équivaut à pol caract = pol min = P_x.

Prop : tout endomph cyclique est semblable à une matrice compagnon

Théorème : invariants de similitude

Appl : L un surcorps de K. Si A,B dans Mn(K) sont semblables sur L, alors elles sont semblables sur K.

Appl : Com(u)=K[u] ssi u est cyclique [Gou 292] *(les invariants de similitude sont utiles pour le sens direct)*

4) Lien entre Jordan et invariants de similitude [Caldero 39]

Les invariants de Jordan sont une suite de tableau de Young T(a_i), les invariants de similitudes sont des polynômes P_i. On note c_i,j le nombre de cases dans la j-ème colonne du i-ème tableau de Young. Le lien entre invariants de Jordan et invariants de similitude est que le j-ème facteur invariant P_j est égal au produit des (X-a_i)^c_i,j (le 1er facteur invariant est le polynôme minimal, et ils sont de plus en plus petits). On peut ainsi passer de l'un à l'autre.

IV) Etude topologique des orbites

1) Equivalence

Prop : r<min(n,m). Alors O_r est une partie connexe de Mn(K) (K=R ou C) *(csq de la connexité de GLn(C) et GLn+(R))* [MT 36]

Prop : clôture d'une orbite [Gou 188]

Cor : le rang est une application semi continue inférieurement. Si A_k est une suite de matrices de rang r qui converge vers A, alors rg(A) est plus petit que r.

Cor : la seule orbite fermée est O_0={0}, et la seule ouverte est O_min(n,m)

2) Similitude

Prop : sur C, une classe de similitude est connexe *(image de GLn(C) par P->PAP^-1)*

Prop : A dans Mn(C) est diagonalisable ssi l'orbite de A est fermée [Gou 191] *qui montre que A est semblable à une matrice triangulaire avec des petits termes hors diagonale*

Dans la suite, on étudie les orbites de l'action de GLn(C) sur les matrices nilpotentes.

Déf et prop : ordre de Chevalley, ordre élémentaire. L'ordre élémentaire engendre l'ordre de Chevalley.

Th : clôture d'une orbite.

Cor : la seule orbite fermée est l'orbite nulle. La seule orbite ouverte est l'orbite maximale.

Remarques sur la leçon :
- ne parler que des matrices sur R ou C et pas sur un anneau principal.
- pas parlé du fait que pour les projecteurs, classes d'équivalences et classes de conj sont confondues.
- toute classe de similitude sur C contient une matrice symétrique [Mneimné p.130]. Pour R, voir section 17.7. (appl de Jordan)
- les classes de similitude bornées sont finies (conjuguer par Id+a*E_i,j, mq toutes les matrices de l'orbite sont diagonales, il y en a donc un nb fini et comme c'est connexe c'est juste un point).
- pas parlé de matrices échelonnées.

Développements :
Réduction de Jordan [???] (***)
Action de Steinitz [Gou 188] + [MT 36] + [Cog 152] (***)
Réduction des endomorphismes normaux [Gou Alg 258] (**)

Biblio :
[Gou] Gourdon - Algèbre
[BMP] Objectif agrégation
[Aud] Audin – Géométrie
[MT] Mneimné Testard
[Caldero]
[Nourdin]
[Cog] Cognet – Algèbre linéaire

<u>Rapport du jury :</u>

2009 : Les opérations sur les lignes et colonnes doivent figurer dans le plan. On pourra utilement dissocier les opérations sur les lignes de celles sur les colonnes. Rappelons que A = PB est équivalent au fait que A et B ont même noyau ; la notion de matrices échelonnées interviendra utilement dans cette leçon. L'extension des opérations au cas des anneaux principaux est délicate, alors que le cas des anneaux euclidiens suffit largement au niveau de l'Agrégation. Les candidats sont encouragés à présenter des applications de la réduction des matrices plutôt que la théorie elle-même ; ils peuvent par exemple étudier quelques équations portant sur une matrice. Il est également suggéré de regarder, sur le corps des réels ou des complexes, les propriétés topologiques d'une classe d'équivalence ou de similitude de matrices. Le jury aimerait avoir quelques applications de la classification des matrices semblables.

2008 : On peut s'interroger sur la réciproque de A, B semblables implique A^k ,B^k équivalentes pour tout k > 0.

2007 (il y avait alors « opérations sur les lignes et les colonnes » dans le titre): Bien distinguer les opérations à gauche des opérations à droite. L'une opère sur les lignes, l'autre sur les colonnes. L'une permet de trouver les équations de l'image et l'autre une base du noyau. La notion de matrice échelonnée pourra être introduite. Rappelons que A = PB avec A,B des matrices de Mat(n,p,K) est équivalent au fait que on peut passer des A vers B par manipulation des lignes et est équivalent au fait que A et B ont même noyau.